Donc : $-e^{-x} \le e^{-x}.\sin 2x \le e^{-x}$. D'où $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{-e^{-x} \le f(x) \le e^{-x}}$$

2) */ $f(x+\pi) = e^{-(x+\pi)}.\sin(2x+2\pi)$

$= e^{-x}.e^{-\pi}.\sin 2x$

Donc : $\boxed{f(x+\pi) = \frac{1}{e^{\pi}}.f(x)}$

*/ $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}.\sin\left(2(x+\frac{\pi}{2})\right)$

$= e^{-x}.e^{-\frac{\pi}{2}}.(-\sin(2x+\pi))$ ($e^{a+b}=e^a e^b$)

$= e^{-\frac{\pi}{2}} \times \left[e^{-x}(-\sin 2x)\right]$ ($\sin(a+\pi)=-\sin a$)

Or $e^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{\left(e^{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}}$

Donc $\boxed{f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}}.f(x)}$

3) sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$:

f est dérivable et on a :

$f'(x) = \left(e^{-x}\right)'.\sin 2x + e^{-x}.(\sin 2x)'$

$= -e^{-x}.\sin 2x + e^{-x}.(2\cos 2x)$

$= (2\cos 2x - \sin 2x).e^{-x}$

Comme on a : $e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ alors :

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(2\cos 2x - \sin 2x)$

On a : $2\cos 2x - \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x = \sin 2x$

$\Leftrightarrow \tan 2x = 2$???

La fonction *tan2x* est périodique de période $\frac{\pi}{2}$ avec la calculatrice on cherche une valeur de x dans $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$

(la calculatrice donne :

$\left.\begin{array}{l}\tan\frac{5\pi}{14} \approx 2.076 \\ \tan\frac{99\pi}{280} \approx 2.018 \\ \tan\frac{7\pi}{20} = \tan\frac{98\pi}{280} \approx 1.962\end{array}\right\}$ et $1.962 \le 2 \le 2.018$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires la valeur de x chercher se trouve dans l'intervalle $\left[\frac{98\pi}{560}, \frac{99\pi}{560}\right]$

Pour les variations et le traçage de la courbe on une valeur approché de x par défaut

$x \in \frac{7\pi}{40} + k\frac{\pi}{2}$, k $\in \mathbb{Z}$

$-\frac{\pi}{2} \le x \le \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \le \frac{7\pi}{40} + k\frac{\pi}{2} \le \pi$

$-\frac{1}{2} \le \frac{7}{40} + \frac{k}{2} \le 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} - \frac{7}{40} \le \frac{k}{2} \le 1 - \frac{7}{40}$

$\Leftrightarrow -1 - \frac{7}{20} \le k \le 2 - \frac{7}{20} \Leftrightarrow -1.35 \le k \le 1.65$

$\Rightarrow k = 0$ ou $k = -1$ *ou* $k = 1$

Donc $x \in \frac{7\pi}{40}$; $x \in -\frac{13\pi}{40}$ ou $x \in \frac{27\pi}{40}$

Tableau des variations de f

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{13\pi}{40}$		$\frac{7\pi}{40}$		$\frac{27\pi}{40}$		π
$f(x)$	–	0	+	0	—	0	+		
$f(x)$	0	↘	−2.4	↗	0.5	↘	−0.13	↗	0